

forma bilineare

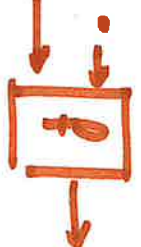
$$f: V(K) \times V(K) \rightarrow K$$

tale che $\forall \alpha, \beta \in K, \forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in V$:

$$f(\alpha \bar{x} + \beta \bar{y}, \bar{z}) = \alpha f(\bar{x}, \bar{z}) + \beta f(\bar{y}, \bar{z})$$



$$f(\bar{x}, \alpha \bar{y} + \beta \bar{z}) = \alpha f(\bar{x}, \bar{y}) + \beta f(\bar{x}, \bar{z}).$$



Fissata una base B di $V(K)$ la forma bilineare

f è rappresentata dalla matrice $B = (f(\bar{e}_i, \bar{e}_j))_{i,j=1}^n$

$$B = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n).$$

$$\bar{x} = \sum_i x_i \bar{e}_i \quad \bar{y} = \sum_j y_j \bar{e}_j$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \Rightarrow f(\bar{x}, \bar{y}) = X^T B Y.$$

f bilineare è simmetrica se

$$\forall \bar{x}, \bar{y} \in V(k) : f(\bar{x}, \bar{y}) = f(\bar{y}, \bar{x}).$$

è alternante se

$$\forall \bar{x} \in V(k) \quad f(\bar{x}, \bar{x}) = 0.$$

N.B. Se $1 \neq -1 \Rightarrow f$ alternante $\Leftrightarrow f(\bar{x}, \bar{y}) = -f(\bar{y}, \bar{x})$.

$$\begin{aligned} f(\bar{x}, \bar{y}) + f(\bar{y}, \bar{x}) &= f(\bar{x}, \bar{y}) + f(\bar{x}, \bar{x}) + f(\bar{y}, \bar{y}) + f(\bar{y}, \bar{x}) \\ &= f(\bar{x}, \bar{y} + \bar{x}) + f(\bar{y}, \bar{x} + \bar{y}) = f(\bar{x} + \bar{y}, \bar{x} + \bar{y}) = 0. \end{aligned}$$

oss: f è simmetrica $\Leftrightarrow$ la matrice che la rappresenta rispetto una qualsiasi base è simmetrica

$$B = {}^t B$$

f è alternante $\Leftrightarrow$ la matrice che la rapp.

rispetto una qualsiasi base è antisimmetrica
e ha 0 sulla diag. principale.

$${}^T B = -B \quad \text{e} \quad \forall i: b_{ii} = 0.$$

Una forma bilineare f è degenera se $\exists \bar{v} \in V(1k), \bar{v} \neq 0$
tale che $\forall \bar{x} \in V(1k) \quad f(\bar{v}, \bar{x}) = 0$

oss: f è degenera $\Leftrightarrow$ ha una matrice rapp. B rispetto
una qualsiasi base B ha $\det = 0$.

Dim: Supponiamo $\det B = 0 \Rightarrow \exists X$ con $X \neq 0$ tale che

$${}^T B X = 0 \Rightarrow \forall y \in 1k^n: {}^T ({}^T B X) y = 0 \Rightarrow$$

$${}^T X B y = 0 \Rightarrow f(\bar{x}, \bar{y}) = 0$$

con $\bar{x} = \sum x_i \bar{e}_i$ ed $\bar{y} \in V(1k)$.

Se $B \neq 0 \Rightarrow \forall X \in \mathbb{R}^n, X \neq 0$

$B^T X \neq 0$. In particolare $\exists$ una componente

$c_i \neq 0$ nel vettore

$$C = B^T X$$

$$\Rightarrow C \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = c_i \neq 0$$

$$\leftarrow i$$

$$B^T X B \quad \text{con } y = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(\sum x_j \bar{e}_j, \bar{e}_i) = c_i \neq 0.$$

$\Rightarrow$ Ma regge che la forma è non degenere. $\square$

Def: Un vettore $\bar{x}$ è detto isotropo per f se
 $f(\bar{x}, \bar{x}) = 0$ e $\bar{x} \neq 0$.

Def: Una forma bilineare numerica è detta prodotto scalare.

Prodotto scalari: $f(\bar{x}, \bar{y}) := \bar{x} \cdot \bar{y}$

Def: Sia $\bar{x} \in V(k)$. Si pone

$$\bar{x}^\perp = \{ \bar{y} \in V(k) : \bar{x} \cdot \bar{y} = 0 \}.$$

" $\bar{x}$ perpendic
"ortogonale"

Se $X \subseteq V(k)$ allora si pone

$$X^\perp = \{ \bar{y} \in V(K) : A \bar{x} \in X : \bar{x} \cdot \bar{y} = 0 \}.$$

Teorema:

$$1) X^\perp \leq V(K) \quad AX \leq V(K).$$

$$2) V^\perp := \text{Rad}(f) \quad \text{indica di } f \text{ i} \\ \text{e } V^\perp = \{ 0 \} \text{ se e solo se } f \text{ è}$$

non degenere.

$$3) \mathcal{L}(X) \subseteq X^{\perp\perp}$$

$$4) \text{ Se " " è non degenere } \Rightarrow \\ \dim X^\perp = n - \dim \mathcal{L}(X).$$



$$5) \text{ Se " " è non degenere} \\ X^{\perp\perp} = \mathcal{L}(X).$$

D14:

1) caratterizzare

$$X^\perp := \bigcap_{\bar{x} \in X} \bar{x}^\perp$$

→ ci basta mostrare $\bar{x}^\perp \leq V(K)$.

$$X^\perp = \{ \bar{y} : \bar{x} \cdot \bar{y} = 0 \}.$$

Siano $\bar{a}, \bar{b} \in X^\perp$, $\alpha, \beta \in K$

$$\Rightarrow (\alpha \bar{a} + \beta \bar{b}) \cdot \bar{x} = \alpha (\bar{a} \cdot \bar{x}) + \beta (\bar{b} \cdot \bar{x}) = 0 + 0 = 0$$

2) "o" degenere $\Leftrightarrow \exists \bar{x} \neq 0$ tale che $\forall \bar{y} \in V : \bar{x} \cdot \bar{y} = 0$

$$\Leftrightarrow \bar{x} \in V^\perp = \text{Rad}(\cdot).$$

3) osserviamo che $X^{\perp\perp} \leq V(K)$

quindi se $X^{\perp\perp} = X$ allora $X \subseteq X^{\perp\perp} \Rightarrow \mathcal{L}(X) \subseteq X^{\perp\perp}$

$$\text{Sia } \bar{x} \in X \Rightarrow \forall \bar{y} \in X^\perp : \bar{x} \cdot \bar{y} = 0$$

$$\Rightarrow \bar{y} \cdot \bar{x} = 0 \forall \bar{y} \in X^\perp \Rightarrow \bar{x} \in X^{\perp\perp}$$

$$\Rightarrow X \subseteq X^{\perp\perp} \Rightarrow \mathcal{L}(X) \subseteq X^{\perp\perp}$$

4) Sia B una finita base di $V_n(\mathbb{K})$ e B la matrice di "..." rispetto questa base.

$\det(B) \neq 0$ in quanto il prod. scalare è non degenere.

osserviamo che se $X \subseteq V_n(\mathbb{K}) \Rightarrow$

$$\Rightarrow X^\perp = \mathcal{L}(X)^\perp \text{ in fatti}$$

$$\text{se } \forall \bar{x}, \bar{y} \in V_n(\mathbb{K}) : \bar{x} \cdot \bar{y} = 0 \Rightarrow \bar{x} \in X^\perp \text{ e } \bar{y} \in X^{\perp\perp} \Rightarrow \bar{x} \cdot \bar{y} = 0$$

$$\Rightarrow \text{anche } (\alpha \bar{x}' + \beta \bar{x}'') \cdot \bar{y} = 0 \Rightarrow \mathcal{L}(X)^\perp \subseteq X^\perp$$

D'altro canto se $X \subseteq Y \Rightarrow Y^\perp \subseteq X^\perp$
e dunque $\mathcal{L}(X)^\perp = X^\perp$.

In particolare $X^\perp$ coincide con $(X')^\perp$ ove
 $X' \subseteq X$ con X' base di $\mathcal{L}(X)$.

$\Rightarrow$ l'insieme $X^\perp = (X')^\perp$ si può scrivere
come l'insieme di tutti i vettori y

tali che

$$\begin{cases} x_1^T B y = 0 \\ \vdots \\ x_k^T B y = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{insieme lineare} \\ \text{di } k \text{ equazioni} \\ \text{in } n \text{ incognite.} \end{matrix}$$

ove $\bar{x}_1 \dots \bar{x}_k$ base di $\mathcal{L}(X)$ rispetto a B .

oss: posso $A = \begin{bmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{x}_2 \\ \vdots \\ \vec{x}_k \end{bmatrix}$ matrice $k \times n$ colonne.

con $\text{rk } A = k$.

(*) diversa $(AB)y = \underline{0}$

B è invertibile $\Rightarrow \text{rk}(AB) = \text{rk}(A)$

perché corrisponde ad una app.
lineare biattiva e dunque unid.
sug. libera in seq. libera $\Rightarrow$

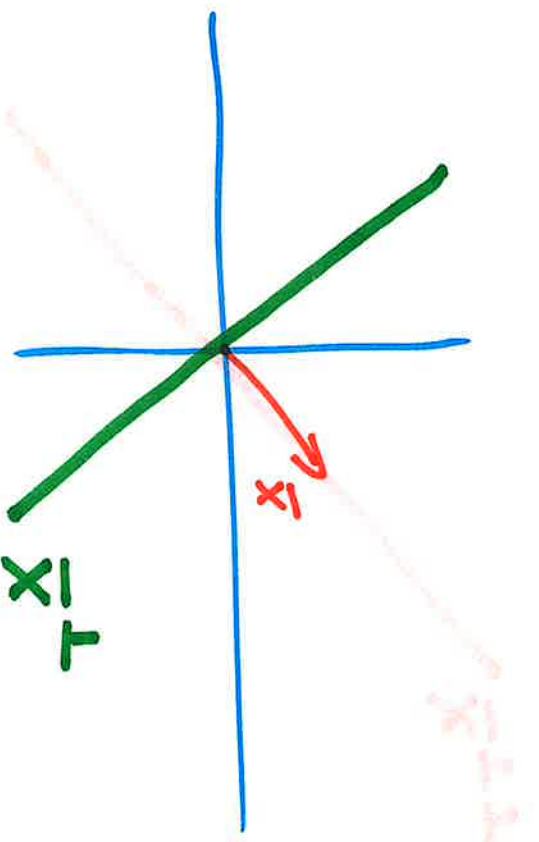
$$X^\perp = \{ y : (AB)y = \underline{0} \} = \ker(AB)$$

$\rightarrow$ nullity + rank $\dim X^\perp + \text{rk}(AB) = n$

$$\dim X^\perp = n - \operatorname{rk}(AB) = n - \dim \mathcal{L}(X).$$

$$5) \dim X^{\perp\perp} = n - \dim X^\perp = n - (n - \dim \mathcal{L}(X)) = \dim \mathcal{L}(X).$$

puisque $\mathcal{L}(X) \subseteq X^{\perp\perp}$ nous avons $X^{\perp\perp} = \mathcal{L}(X)$.



□

oss: • $A \subseteq B \Rightarrow B^\perp \subseteq A^\perp$

• $A^\perp = \mathcal{L}(A)^\perp$

Def: In $\mathbb{R}^n$ si dice prodotto scalare standard il prodotto scalare definito dalla matrice identità rispetto le base canonica.

$$(x_1 \dots x_n) \cdot (y_1 \dots y_n) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \\ = \sum_i x_i y_i$$

Oss: Se $X = \{ (x_{11} \dots x_{1n}), \dots, (x_{m1} \dots x_{mn}) \} \Rightarrow$

$$X^T = \{ y : \begin{bmatrix} x_{11} \dots x_{1n} \\ \vdots \\ x_{m1} \dots x_{mn} \end{bmatrix} y = \underline{0} \} = \text{Ker}(A)$$

rispetto prod
scalare std.

$$A = \begin{bmatrix} x_{11} \dots x_{1n} \\ \vdots \\ x_{m1} \dots x_{mn} \end{bmatrix}$$

Teorema:

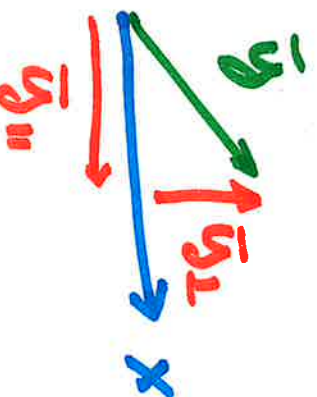
Siano $\bar{x}, \bar{y} \in V_n(k)$ e sia "·" un prodotto scalare non degenere.

Sappiamo $\bar{x} \cdot \bar{x} \neq 0$ (cioè $\bar{x}$ anisotropo).

$\Rightarrow \forall \bar{y} \in V(k)$ è possibile scrivere

$$\bar{y} = \bar{y}_{||} + \bar{y}_{\perp}$$

ove $\bar{y}_{||} \in L(\bar{x})$ e $\bar{y}_{\perp} \cdot \bar{x} = 0$



DIM:

possiamo

$$\bar{y}_{||} = \frac{\bar{y} \cdot \bar{x}}{\bar{x} \cdot \bar{x}} \bar{x}$$

$$\bar{y}_{\perp} = \bar{y} - \bar{y}_{||}$$

$$\begin{aligned} \bar{y} \cdot \bar{x} &= (\bar{y} - \bar{y}_n) \cdot \bar{x} = \\ &= \bar{y} \cdot \bar{x} - \frac{\bar{y} \cdot \bar{x}}{\bar{x} \cdot \bar{x}} \bar{x} \cdot \bar{x} = 0 \quad \square \end{aligned}$$

Def: Una sequenza di vettori $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k)$ in $V(k)$ è detta ortonormale se

$$\forall i, j \in \{1, \dots, k\} \quad \begin{cases} \bar{e}_i \cdot \bar{e}_i = 1 & \text{se } i = j \\ \bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

oss: Una sequenza ortonormale è libera

$\sum_k a_k \bar{e}_k = \underline{0}$: con $a_j \neq 0$ per qualche j

$$\bar{e}_j \cdot \left(\sum_k a_k \bar{e}_k \right) = \bar{e}_j \cdot \underline{0} = 0$$

$$\bar{e}_j \cdot \left(\sum_k a_k \bar{e}_k \right) = \sum_k a_k (\bar{e}_j \cdot \bar{e}_k) = a_j = 0 \quad \forall j$$

053 II: Supponiamo $B = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ base ortonormale.

Allora 1) " " rispetto a B ha come matrice rappresentativa I

$$2) \text{ Sia } \bar{v} = \sum_j v_j \bar{e}_j \in V(1k).$$

$$\text{allora } v_i = \bar{v} \cdot \bar{e}_i$$

$$\begin{aligned} \bar{v} \cdot e_i &= \left(\sum_j v_j \bar{e}_j \right) \bar{e}_i = \sum_j v_j (\bar{e}_j \cdot \bar{e}_i) = \\ &= v_i \quad \square \end{aligned}$$

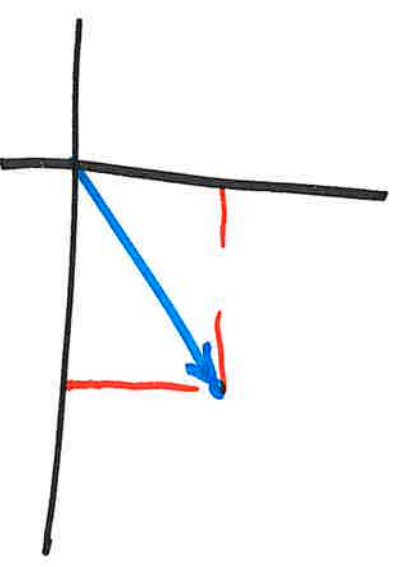
⚠️ se B ortonormale $\Rightarrow v_i = \bar{v} \cdot \bar{e}_i$

$$u \text{ B non è ortogonale} \Rightarrow \bar{v}_i = \frac{v \cdot \bar{e}_i}{\bar{e}_i \cdot \bar{e}_i}$$

$u \text{ B non è ortogonale} \Rightarrow$ non funziona!



BASE NON
ORTOGONALE.



BASE ORTOGONALE

oss: sia $\bar{e} \in \mathbb{K}^n$ tale che $\bar{e} \cdot \bar{e} = \alpha \neq 0$
 Dando! esiste un $\bar{e}' \in \mathbb{K}^n$: $\bar{e}' = \frac{1}{\alpha}(\bar{e})$ e

$$\vec{e}' \cdot \vec{e}' = 1 ?$$

$$\vec{e}' = P \vec{e} \quad \text{in quanto } \vec{e}' \in \mathcal{L}(\vec{e})$$

$$\Rightarrow \vec{e}' \cdot \vec{e}' = P \vec{e} \cdot P \vec{e} = P^2 \vec{e} \cdot \vec{e} = P^2$$

Quindi $\exists \vec{e}'$ con la proprietà richiesta $\Leftrightarrow$ α è un quadrato, perché allora si prende $P = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$

Dato un prod. scalare non degenere $\exists$ basi ortogonali?

Se n , come costruirle?

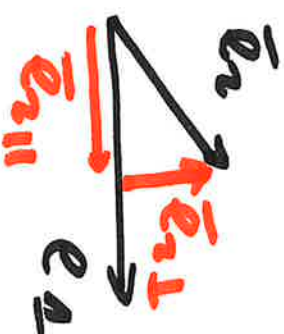
1) Si parte da una base

$$B = (\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n) \quad \text{anisotropo poi}$$

si ortogonalizza con Gram-Schmidt.

$$B = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$$

B' base tale che $B' = (\bar{e}'_1 \bar{e}'_2 \dots \bar{e}'_n)$.



$$\bar{e}'_1 = \bar{e}_1$$

$$\bar{e}'_2 = \bar{e}_2 - \frac{\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2}{\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1} \bar{e}_1$$

$$\bar{e}'_3 = \bar{e}_3 - \frac{\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_3}{\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1} \bar{e}_1 - \frac{\bar{e}_2 \cdot \bar{e}_3}{\bar{e}_2 \cdot \bar{e}_2} \bar{e}_2$$

...

$$\bar{e}'_i = \bar{e}_i - \sum_{j < i} \frac{\bar{e}_j \cdot \bar{e}_i}{\bar{e}_j \cdot \bar{e}_j} \bar{e}_j$$

$$\bar{e}'_1 \cdot \bar{e}'_2 =$$

$$= \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 - \frac{\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1}{\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1} \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2$$

$$+ \left(\frac{\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2}{\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1} \right) \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2$$

funzioni a posto che $\bar{e}'_i \cdot \bar{e}'_i = 1$
 A_i .

per avere una base ortonormale, si procede per normalizzando i vettori (se possibile).

$$\bar{e}_i'' := \bar{e}_i' \cdot \frac{1}{\sqrt{\bar{e}_i' \cdot \bar{e}_i'}}$$

Def: Sia $K = \mathbb{R}$ e si dice prodotto scalare euclideo su prod. scalare

$$\bullet V(\mathbb{R}) \times V(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

definito positivo, cioè vale due

$$1) \forall \bar{x} \in V(\mathbb{R}) : \bar{x} \cdot \bar{x} \geq 0$$

$$2) \bar{x} \cdot \bar{x} = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \underline{0}$$

N.B.: con un prod. scalare definito positivo

G/S functions sempre, in quanto

$\forall \bar{x} \in V(k) : \bar{x} \cdot \bar{x} \geq 0$ è un quadrato

ed inoltre $\bar{x} \neq 0 \Rightarrow \bar{x} \cdot \bar{x} \neq 0$.

$\Rightarrow \exists$ sempre una base di $V(k)$ rispetto cui
un prod. scalare euclideo è rapp. dalla
matrice identità $\Rightarrow$ è il prod. scalare standard.

Def.: Sia "•" un prod. scalare euclideo su $V_n(\mathbb{R})$

si dica norma euclidea di $\bar{v} \in V_n(\mathbb{R})$ il

numero $\|\bar{v}\| := \sqrt{\bar{v} \cdot \bar{v}}$

$f: V(k) \times V(k)$ un prodotto scalare

associato ad f c'è una forma quadratica

$$q(\bar{x}) = f(\bar{x}, \bar{x})$$

$$q(x): V(k) \rightarrow k.$$

oss: data $q(\bar{x})$ si può recuperare ricorsivamente f
(a parte che $-1 \neq 1$ cioè $2 \neq 0$).

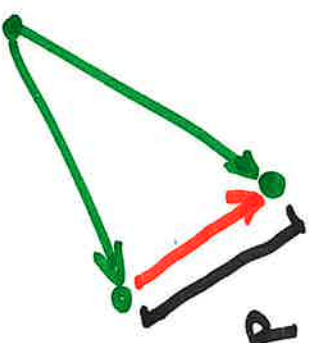
$$\begin{aligned} q(\bar{x} + \bar{y}) &= f(\bar{x} + \bar{y}, \bar{x} + \bar{y}) = f(\bar{x}, \bar{x}) + f(\bar{x}, \bar{y}) + \\ &\quad f(\bar{y}, \bar{x}) + f(\bar{y}, \bar{y}) = \\ &= 2f(\bar{x}, \bar{y}) + q(\bar{x}) + q(\bar{y}). \end{aligned}$$

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{2} [q(\bar{x} + \bar{y}) - q(\bar{x}) - q(\bar{y})].$$

$$\|\bar{x}\|_2 := \sqrt{\bar{x} \cdot \bar{x}}$$

- 1) DISTANZA FRA PUNTI/
- 2) LUNGHEZZA VETTORI
- 3) PROD SCALARE FRA VETTORI.

norma euclidea
 con "...": $V(\pi_2) \times V(\pi_2) \rightarrow \mathbb{R}$
 definita positivo.

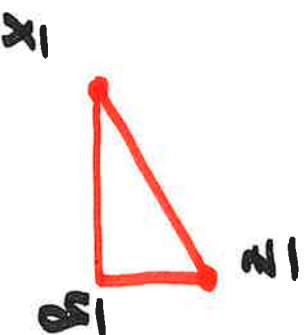


Sei $V_n(l_k)$ uno spazio vettoriale

$$d: V_n(l_k) \times V_n(l_k) \rightarrow \mathbb{R}$$

è detta distanza $\mathcal{R}$.

- 1) $d(\bar{x}, \bar{y}) \geq 0$
- 2) $d(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{y}$
- 3) $d(\bar{x}, \bar{z}) \leq d(\bar{x}, \bar{y}) + d(\bar{y}, \bar{z})$



Esempio in $\mathbb{R}^n$ $d_H(\bar{x}, \bar{y}) := |\{x_i \neq y_i\}|$
distanza di Hamming.

$$\|\cdot\|: V_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

è detta norma se soddisfa le seguenti proprietà:

- 1) $\|\bar{x}\| \geq 0$
- 2) $\|\bar{x}\| = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \underline{0}$
- 3) $\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$
- 4) $\|\alpha \bar{x}\| = |\alpha| \cdot \|\bar{x}\|$.

Esempi in $\mathbb{R}^n$

$$\|\bar{x}\|_1 = \sum |x_i|$$

$$\text{NORMA } \|\bar{x}\|_\infty = \sup |x_i|$$

$$d(\bar{x}, \bar{y}) := \|\bar{x} - \bar{y}\|$$

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = \|\bar{x} - \bar{y}\|$$

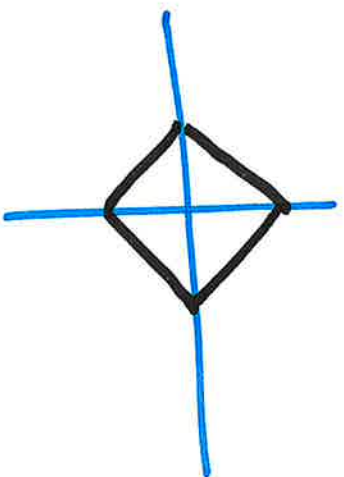
$$d(\bar{x}, \bar{z}) \leq d(\bar{x}, \bar{y}) + d(\bar{y}, \bar{z})$$

$$\|\bar{x} - \bar{z}\| = \|\bar{x} - \bar{y} + \bar{y} - \bar{z}\|$$

$$\leq \|\bar{x} - \bar{y}\| + \|\bar{y} - \bar{z}\|$$

$$= d(\bar{x}, \bar{y}) + d(\bar{y}, \bar{z}).$$

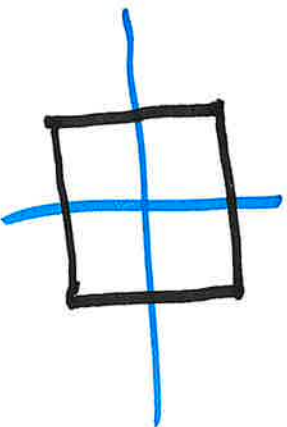
non
circul.



$$\{ \bar{x} : \|\bar{x}\|_1 = 1 \}$$

$$\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| = 1 \}$$

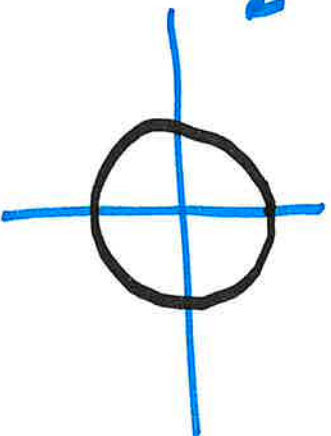
non
circul.



$$\{ \bar{x} : \|\bar{x}\|_\infty = 1 \} =$$

$$= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max(|x|, |y|) = 1 \}$$

circulaire



$$\{ \bar{x} : \|\bar{x}\|_2 = 1 \}.$$

$$= \{ (x, y) : \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \} =$$

$$= \{ (x, y) : x^2 + y^2 = 1 \}.$$

DI MOSTRARE CHE LA NORMA EUCLIDEA è una norma.

$$\|\bar{x}\| := \sqrt{\bar{x} \cdot \bar{x}}$$

prod. scal. def positivo

per def $\|\bar{x}\| \geq 0 \quad \forall \bar{x}$

$$\|\bar{x}\| = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \underline{0}$$

$$\|\alpha \bar{x}\| = \sqrt{\alpha \bar{x} \cdot \alpha \bar{x}} = \sqrt{\alpha^2 \bar{x} \cdot \bar{x}} = |\alpha| \cdot \|\bar{x}\|$$

• DISUGUAGLIANZA DI CAUCHY-SCHWARTZ

$$\forall \bar{x}, \bar{y} \in V(\mathbb{R}) \quad |\bar{x} \cdot \bar{y}| \leq \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\| \quad (1)$$

• DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

$$\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\| \quad (2)$$

(1) $\Rightarrow$ (2)

$$\begin{aligned} \|\bar{x} + \bar{y}\|^2 &= (\bar{x} + \bar{y}) \cdot (\bar{x} + \bar{y}) = \\ &= \bar{x} \cdot \bar{x} + \bar{x} \cdot \bar{y} + \bar{y} \cdot \bar{x} + \bar{y} \cdot \bar{y} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \|x\|^2 + 2(\bar{x} \cdot \bar{y}) + \|\bar{y}\|^2 \leq \\
 &\|x\|^2 + 2|\bar{x} \cdot \bar{y}| + \|\bar{y}\|^2 \leq \quad \text{c/s} \\
 &\|x\|^2 + 2\|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\| + \|\bar{y}\|^2 = \\
 &= (\|x\| + \|\bar{y}\|)^2
 \end{aligned}$$

extrahiere $\sqrt{\quad}$: $\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$.

D14 D1 Cauchy-Schwarz. $|\bar{x} \cdot \bar{y}| \leq \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|$

oss: Se $\bar{y} = \underline{0} \Rightarrow |\bar{x} \cdot \bar{y}| = 0 \leq \|\bar{x}\| \cdot \|\underline{0}\| = 0$

$\bar{y} \neq \underline{0}$ e consideriamo

$$\|\bar{x} + \alpha \bar{y}\|^2 = (\bar{x} + \alpha \bar{y}) \cdot (\bar{x} + \alpha \bar{y}) =$$

$$= \alpha^2 (\bar{y} \cdot \bar{y}) + 2\alpha \bar{x} \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot \bar{x} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Δ_n della funzione in 2 deve essere ≤ 0

$$\Delta_n = (\bar{x} \cdot \bar{y})^2 - (\bar{y} \cdot \bar{y}) \cdot (\bar{x} \cdot \bar{x}) =$$

$$= (\bar{x} \cdot \bar{y})^2 - \|\bar{y}\|^2 \cdot \|\bar{x}\|^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow (\bar{x} \cdot \bar{y})^2 \leq \|\bar{x}\|^2 \cdot \|\bar{y}\|^2$$

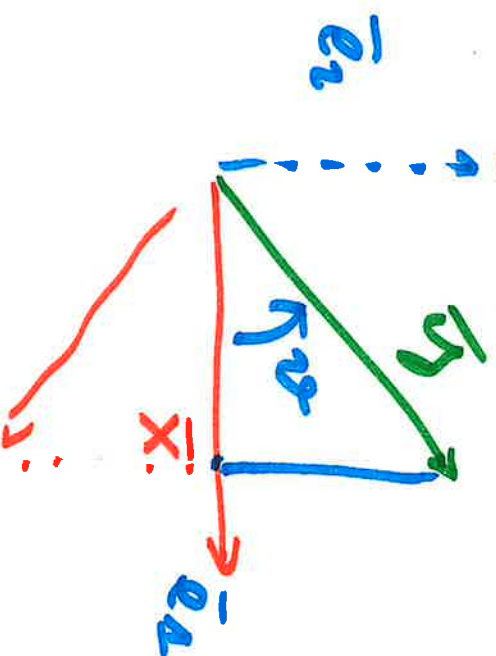
$$\Rightarrow |\bar{x} \cdot \bar{y}| \leq \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|$$

□

Siano $\bar{x}, \bar{y} \in V_n^{\bullet}(\mathbb{R})$  sp. vettoriale euclideo
in $\mathbb{R}$ (= con prod. scal.
definito positivo).

$\cos \vartheta = \cos \text{angolo fra } \vec{x} \text{ e } \vec{y}$

$$= \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|}$$



$$y_n = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\vec{x} \cdot \vec{x}}$$

$$\|\vec{x}\| = 1$$

$$\|\vec{y}\| = 1$$



$$\vec{e}_1 = (1, 0)$$

$$\vec{e}_2 = (0, 1)$$

$$-\vec{e}_2 = (0, -1)$$